

シネマセマティクス入門

映画で数楽しよう！

いんとろだくしょん

大変だ！ ぼやぼやしてると大爆発だ！

急げ！ 急ぐんだ！ ……

年に 10^n 本も見たい映画があります。（ n は1と2の間の実数です）

思うように映画館に行けないと，，ストレスがたまります…

数学に関係あるシーンを見ると，真っ暗な中でもメモを取ってしまいます．

そんな数学シーンも，徐々に増えます…

そのいくつかをネタにして，数学的に考える授業が実現

今ここにいる皆さんは，みんな私のえじきです，

そうです，みんな犠牲者です．

この講座が終わる頃，みなさん映画オタクに変身していることでしょう！

映画って，ホントいいですね！

登場する予定の映画（登場順ではありません…）

ダイハード3

アポロ13

スペシャリスト

ビリー・バズゲイト

愛しすぎて 詩人の妻

それでは，講座の，はじまり・はじまりーツ…

第1章 トリック (ダイハード3)

監督 ジョン・マクティアナン

出演 ブルース・ウィリス/ジェレミー・アイアンズ/サミュエル・L・ジャクソン

ニューヨーク・黒人街ハーレム、『俺は黒人が大嫌いだ!』の看板でサンドイッチマンになって歩くマックレーン刑事、デパートを爆破した犯人サイモン・冷徹なテロリストの命令に背くと、さらなる爆弾テロが行なわれるのだ。黒人達に囲まれながらも、何とか危機を逃れると、犯人サイモンからは次の指令が...

次から次と問題を出す犯人サイモン、それを何とか解決していくマックレーン刑事たちのやり取りが面白い。

まずは“トリック”にひっかからないように注意して...

Q1. サイモンの出した問題です...

「セントアイブズに行く道で、会った男に妻7人、
猫7匹ずつに、子猫7匹、セントアイブズに行ったのは何人と何匹か？」
「その数字を555の後に付け、30秒後に電話しろ...」

さて、皆さんならどのようにダイヤルしますか？

Q2. またまた、サイモンの出した問題です...

「あまり離れると爆発する、だから逃げるなよ、
噴水の上に容器が2つ、5ガロンと3ガロンずつ入る、
1つの容器に水を4ガロン入れて、はかりの上に置けばタイマーが止まる、
4ガロンきっちりでないで爆発するぞ、生き残れるかな？」

またまた難問です!?

これはみんなで相談しながら解答を見つけ出したい問題です...

マックレーン刑事たちは苦しみながら、残り1分足らずのとき解答を見つけ出します。皆さんはどんなものでしょう？

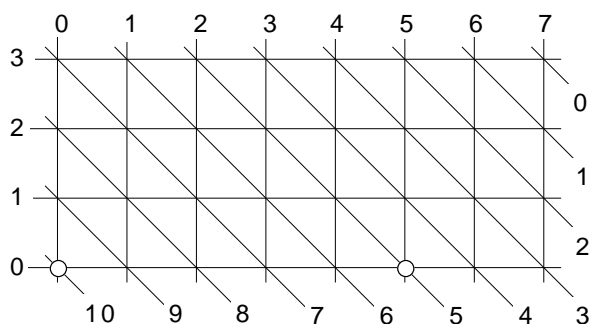
この問題は昔から『油分けの問題』として有名で、和算（江戸時代の数学）の本にも載っています。この場合、「八升ますにいっぱいのおを、三升ますと五升ますだけを使って二等分せよ」という問題になります。

映画には8 ガロン容器はありませんでしたが、池を8 ガロン容器におきかえて、単位はガロンのままで考えてみてください。

発展 2 等分の問題，グラフ用紙で考えよう！

「3 ガロンの容器，7 ガロンの容器，
10 ガロンの容器を使って，10 ガロンの水を二等分せよ」

グラフ用紙に次のような図を書けば，表は不要になります！



たての線は7 ガロン容器に入っている水の量を表し，0 から7 の目盛があります。

横線が3 ガロン容器の水の量で，斜めの線が10 ガロン容器の水の量になることはわかりますか？

しかし，斜めの線の目盛は逆向きであることには要注意です！

はじめは10 ガロン容器がいっぱいだから，グラフ上の点では(10, 0, 0)にいます・・・そして，二等分が終わるということは，次の二つの原則に沿ってグラフ上の点(5, 5, 0)に移動している訳です。

第一の原則は“たて・横・斜めの線に沿って移動する”こと。そして，“壁にぶつかるまで移動し，つぎの壁へ移動する”ことが第二の原則です。

この二つの原則で移動をくりかえし，点(10, 0, 0)から，点(5, 5, 0)に移動してみよう！

この場合も2通りの方法があります。両方とも見つけ出してください。

また，移動の原則の意味について説明してください。

第2章 だまし (ビリー・バスゲイト)

監督 ロバート・ベントン

出演 ダスティン・ホフマン / ニコール・キッドマン / ブルース・ウィリス

1930年代、ギャングの勢力争いが激化するニューヨーク、絶大な権力をもっていたボス・ダッチ・シュルツは血気盛んな青年ビリー・バスゲイトを子分にし目をかけた。

ビリーはギャングの世界の明暗を見ながら一人前の男へと成長していくのだが...

ギャングに仲間入りして掃除をしていたビリーは、ギャングの会計をあずかる男に声をかけられる。「... この世は数字だ ...」

Q 3 . 会計士の手口を分析しよう！

「この世は数字だ、例えば、お前の持ち金を当てたら、金はわしのもの、
だが、間違ったら倍の金をやろう、乗るか？」

「では、それに2を掛けて3を足せ、5を掛けて6を引け、いくつになった？」

『279』

「では、27セントだ、お前も勉強しろ...」

と言いながら、お金をまきあげる。

会計士の“だまし”の手口はどうなっているのでしょうか？

これは、単純な数当てゲームです、考えてみてください。

たとえば27だと・・・こんな説明を考えてはいませんか？

2を掛けると54、そこに3を足して57、

これに5を掛けると285、最後に6を引いて279、

つまり、計算結果から9引いて10で割れば、もとの数になる...

こんな説明では不十分！「他の数でも成り立つか？」と聞かれたら、同じことを繰り返して、9引いて10で割ればもとの数になることを示さないといけない！

文字で説明すれば、一度の説明で十分！文字を使つての説明にチャレンジ！

発展 だましの手口をもう少し深く考えよう！

「2 を掛けて 3 を足せ，5 を掛けて 6 を引け」を，数式で書くと

$$\times 2, \quad + 3, \quad \times 5, \quad - 6$$

となります．それぞれの数のもつ役割を考え，数当ての仕組みを分析しよう！

分析が終わったら，次の問題にチャレンジしよう！

「ある数に 2 を掛けて 1 を引き，

5 を掛けて 7 を足したら，2 2 2 になった」

ある数を x として，この数当ての仕組みを説明しよう．

また，ある数を求めよう．

Q 4 . 誕生日当てゲームです！ どんな仕組みがある考えよう！

「日に 5 を掛けて」「2 を足して」「4 を掛けて」

「6 引いて」「5 を掛けて」「月を足す」「いくつになった？」…

『1 8 1 3』…

さて，誕生日は何月何日か？ この誕生日当ての仕組みを説明しよう！

文字を使ってみると意外に簡単に説明できるものです…

数式で考えると，

$$\times 5, \quad + 2, \quad \times 4, \quad - 6, \quad \times 5$$

やはり，数当てと同じ仕掛けがあります．

第3章 論理？ (スペシャリスト)

監督 ルイス・ロッサ

出演 シルベスタ・スタローン / シャロン・ストーン / ジェームズ・ウッズ

元C I Aの爆破工作員レイは、謎の美女メイから彼女の両親を殺した3人の犯人達、犯罪組織のボスとその手下を爆破するという仕事を依頼される。

レイが爆破技術を駆使して次々と標的を仕留めるが、組織は警察と組んで捜査網を敷く。捜査を指揮するのはレイの元上司ネッドで、彼はレイの仕業であることを知っていた。

すべての仕事を終えたレイは、メイと恋に落ちる。一方ネッドメイを利用して、レイ爆破犯に仕立て上げ、自分の手で彼への恨みを晴らそうと企んでいた...

自分が利用されていることに苦しむメイはレイに手紙を残す...

Q 5 . レイは、メイの残した手紙を信じたか？

「私は信じてはいけない女よ・・・」

レイが、メイの残した手紙を信じるとしたら？ 手紙を信じないとしたら？
それぞれの場合について考えてみると...

発展 『古畑任三郎シリーズ』に登場したことがある堂々巡りの応用問題です。

大学の数学助教授が、刑事にこんな問題を出しました。

人喰いライオンに襲われたハンターが『食べないでくれ』とライオンに頼む。すると、ライオンは『今からオレ様がすることを当ててみる。もし当てたらおまえを食べない』と約束する。そこで、ハンターはひとことだけ言ってライオンから無事逃げることができた。

さて、ハンターはライオンに何と答えただろうか？

ライオンがハンターを食べるつもりだとしたら・・・ 考えてみよう？

本当にハンターはライオンから逃げ出せるのでしょうか？

Q 6 . 君ならどうする？

分かれ道の先は“正直村”か“嘘つき村”，どっちがどっちか分からない！
分かれ道には一人の男が立っている，
その男が“正直”なのか“嘘つき”なのかも分からない！
1つだけ質問して，どっちの道が“正直村”に通じるかを知りたい，
さあ，君ならどう質問しますか？

昔からある有名な問題です．上手に質問すれば，“正直村”に到着できます．

ヒントです，次のような質問にはどんな答えが返ってくるだろうか？

相手が“正直男”の場合，“嘘つき男”の場合，それぞれについて考えてみよう！

『あなたは正直か？』

『あなたは嘘つきか？』

『あなたは正直村から来たのか？』

『あなたは嘘つき村から来たのか？』

『正直村へ行くには，右の道でいいのか？』

『あなたの村へは，左の道を行けばいいのか？』

発展 難しい問題です，君はどうする？

分かれ道の先は“正直部落”と“嘘つき部落”からなる“村”または
“完全な迷い道”，どっちがどっちか分からない！
分かれ道には一人の男，“正直”か？ “嘘つき”か？
1つだけ質問して，“村”に通じる道を正直に答えてもらおう！

ヒントです，次のような質問にはどんな答えが期待できるだろうか？

『右の道はあなたの村に通じるか？』

『あなたは嘘をついたことがあるか？』

『あなたは今から私に嘘をつくのか？』

『あなたは“私の質問に嘘で答えるのか”と聞かれたら，

“ちがう”と答えるのか？』

第4章

解

説

《解説 1》

冷静に考えると絶対に間違えない問題です．まさに，トリックです．

それにしてもあんな早口でしゃべられて，問題をきちんと聞き分けているとは...！

実は，この問題の出典は『マザーグースのうた』で，こんな歌を口ずさみながらみんな大きくなったんでしょうね．

As I was going to St. Ives, I met a man with seven wives,
Each wife had seven sacks, Each sack had seven cats,
Each cat had seven kits, Kits, cats, sacks, and wives,
How many were there going to St. Ives?

映画の中の計算，《 7 ， $7 \times 7 = 49$ ， $49 \times 7 = 343 \cdots$ 》というのは，数学的には『等比数列』の問題です．しかし，この間違いは“正しい間違い”ではありません．“正しい間違い”は，《 $7 + 49 + 343 + \cdots$ 》のはずです...

《解説 2》

“4 ガロン”を作り出すには，次の2通りの方法があります．

5 ガロン	0	3	3	5	0	1	1	4
3 ガロン	3	0	3	1	1	0	3	0

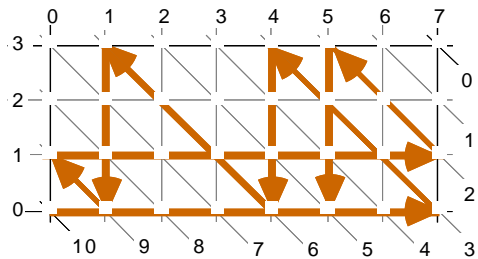
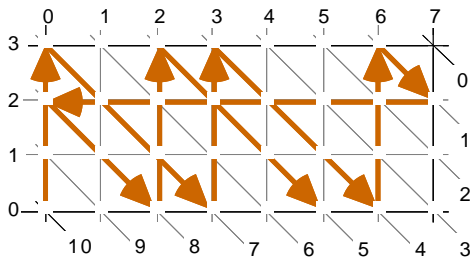
5 ガロン	5	2	2	0	5	4
3 ガロン	0	3	0	2	2	3

爆発まであと1分足らずの時，マックレーン刑事たちは気付きます．

「ここに2 ガロンだな，1 ガロンの空がある...」

映画の中の解決方法は，どちらの方法だったのでしょうか？

発展では、次の2通りの方法が簡単に見つかります。表にも直してください。



2つの原則の意味を考えましょう。まず、『第一の原則』です。たとえば、3ガロン容器から7ガロン容器に水を移し替えるとき、10ガロン容器の水の量は変わりません。つまり、“斜めの線に沿って移動する”ことになります。

また、3ガロン容器から10ガロン容器に水を移し替えるとき、7ガロン容器の水の量は変わらないので、この場合は“たての線に沿って移動する”ことになります。

このように、容器から容器に水を移し替えるとき、もう1つの容器の水の量は変わらないので、“たて・横・斜めの線に沿って移動する”訳です。

『第二の原則』です。水を移し替えるとき、正確さが求められます。途中で止めると不正確になってしまうので、容器が空になるか、いっぱいになるまで止めてはいけません。容器が空か、いっぱいかという状態は、どれもグラフの“壁”を表しています。

つまり、“壁にぶつかるまで移動し、次の壁へ移動する”... これで説明は終わりです。

この解説は、空間座標を利用するともっとわかりやすいかも知れません。

7ガロン容器の水の量を x 、3ガロン容器の水の量を y 、10ガロン容器の水の量を z とすると、水の移し替えは平面 $\langle x + y + z = 10 \rangle$ 上での移動を意味します。また、“壁”とは平面 $\langle x = 0, x = 7, y = 0, y = 3, z = 0, z = 10 \rangle$ のことです。

さらに、縦の線は2平面 $\langle x + y + z = 10, x = a \rangle$ の交線のこと、同様に横の線は2平面 $\langle x + y + z = 10, y = b \rangle$ の交線、斜めの線は2平面 $\langle x + y + z = 10, z = c \rangle$ の交線のことです。

立体模型でもあれば、“たて・横・斜めの線に沿って移動する”と“壁にぶつかるまで移動し、次の壁へ移動する”の2つの原則は一目瞭然です。

発展の発展です。次の2問もグラフを使って考えてください。

1. 3ガロンの空容器と、6ガロンの容器に4ガロンの水と、7ガロンの容器に6ガロンの水がある。この3つの容器だけを使って、合わせて10ガロンの水を2等分しなさい。
2. 6ガロンの空容器と、11ガロンの空容器と、16ガロンの容器に16ガロンの水がある。この3つの容器だけを使って、16ガロンの水を2等分しなさい。

《解説 3》

所持金を x として計算してみることにします．

$$\begin{array}{llll} x & (2 \text{ を掛けて}) & 2x & (3 \text{ を足せ}) & 2x + 3 \\ & (5 \text{ を掛けて}) & 5(2x + 3) = 10x + 15 & & \\ & (6 \text{ を引け}) & & & 10x + 15 - 6 = 10x + 9 \end{array}$$

さあ、これで数当ての仕組みがはっきりしたはずです！

『 $\times 2$, $+ 3$, $\times 5$, $- 6$ 』を分析すると…

“ $\times 2$ ”と“ $\times 5$ ”を続けて計算すれば，“ $\times 10$ ”になる，ここが肝心！ “ $+ 3$ ”や“ $- 6$ ”は適当な数でもいい部分！

つまり，“ 2 をかけて， 5 をかけて”と続けて指示したら，『何だ， 10 倍じゃないか』と相手に気付かれてしまう．しかし，“ $\times 2$ ， $\times 5$ ”と“ $+ 3$ ， $- 6$ ”が組み合わせられているから，相手は“だまし”に気付かず，『あれっ？』と思うわけです．

この場合，“ $\times 2$ ， $\times 5$ ”が『本質』で，“ $+ 3$ ， $- 6$ ”は本質を隠す『ノイズ』の役割を果たしています．“だましのテクニック”は『ノイズ』を巧みに利用した，一種の“心理トリック”ともいえます．

同様に，『 $\times 2$, $- 1$, $\times 5$, $+ 7$ 』も分析してみてください．

これで君も，オリジナルの数当てゲームを作ることができるはずです…

《解説 4》

日をD，月をMとして計算してみましょう！

$$\begin{array}{llll} \text{日に} 5 \text{ を掛けて} & (&) & 2 \text{ を足して} & (&) \\ & 4 \text{ を掛けて} & (&) & & \\ & 6 \text{ 引いて} & (&) & & \\ & 5 \text{ を掛けて} & (&) & & \\ & \text{月を足す} & (&) & & \end{array}$$

『 $\times 5$, $+ 2$, $\times 4$, $- 6$, $\times 5$ 』を分析します…

“ $\times 5$ ， $\times 4$ ， $\times 5$ ”をまとめると，“ $\times 100$ ”です．つまり，“ $\times 5$ ， $\times 4$ ， $\times 5$ ”が『本質』の部分で，『ノイズ』の部分は“ $+ 2$ ， $- 6$ ”だということです．

あとは『本質』の部分の順番と，『ノイズ』部分との組み合わせ方を変えたりするだけで，新しい誕生日当てゲームを作ることができます．

ちょっと工夫して，オリジナルの誕生日当てゲームを作ってみませんか？

《解説 5》

レイが、メイの残した手紙を信じる レイは、メイを信じない
レイは、信じないメイの残した手紙を信じてはいけない...

レイが、メイの残した手紙を信じない レイは、メイを信じる
レイは、信じるメイの残した手紙を信じないといけない...

こんなことを考えていると、頭の中が混乱してきます。映画に集中できません。ラストの大爆破シーンを楽しむためには、余分なことは考えず映画に没入しましょう...

このパラドックスは、昔から“人喰いワニのパラドックス”または“人喰いライオンのパラドックス”として知られているものと同じです。

TVの人気番組「古畑任三郎シリーズ」に登場した“人喰いライオンのパラドックス”での解答は次のようです。

ハンターがライオンに「おまえは今から俺を食べる！」と答えたとしよう。ライオンがハンターを食べるつもりがなければ問題ない。もし食べるつもりなら、ハンターが当たりだから、ライオンが約束を守ればハンターを食べられない。これで、ハンターは無事逃げられることになる。

ところで、本当にこれでいいのだろうか？ 少し変なところがある！

ハンターが当たると、ライオンはハンターを食べられなくなる。しかし、ライオンがハンターを食べないということは、ハンターが外れたことになる。つまり、ハンターがライオンから逃げられたかどうかは、はっきりしないわけです。

もう少しいていないに考えてみよう！ ライオンがハンターを食べるつもりがなければ問題ない。しかし、ライオンがハンターを食べるつもりだったら、ハンターが当たりだから、ライオンは約束を守ってハンターを食べない。ライオンがハンターを食べなければ、ハンターが外れたことになり、ライオンは約束通りハンターを食べられる。

ライオンがハンターを食べようとする、その瞬間ハンターが当たったことになり、ライオンはハンターを食べられない。次にライオンがあきらめた瞬間、ハンターが外れたことになり、ライオンはハンターを食べられる。これが永久にくりかえされることになり、ライオンもハンターも死ぬまで動くことができなくなるというのが正しい解釈になります。

“人喰いワニのパラドックス”では人喰いワニに子供を奪われた母親がワニに懇願する、
「どうぞ私の子供を食べないでください」

『そうだな、今日俺様がどんなことをするか当てたら、子供を食わずに返してやる。』

そのかわり、当てられなければこの場で食ってしまうからな！』

「あなたは私の子供を食べるでしょう」

さて、ワニは子供を食べることができるでしょうか？

“人喰いライオンのパラドックス”と同じで、ワニの意思がどうであれ、ワニは大きな口を開けたり閉じたり・・・可愛そうにワニ君、口の開け閉めを止めることができません。このワニの口の開け閉めを、電気回路にするとベルやブザーになるそうです。

このあたりのことは、『詭弁論理学』『逆説論理学』（中公新書・野崎昭弘）が詳しいので、読んでください。

《解説 6》

“正直男”はどんな質問にも正直に答え、“嘘つき男”はどんな質問にも嘘で答えます。だけど、質問の種類によって二人の答えが同じになる場合と、別々になる場合があります。

『あなたは正直か？』

『あなたは嘘つきか？』

『あなたは正直村から来たのか？』

『あなたは嘘つき村から来たのか？』

『あなたの村へは、左の道を行けばいいのか？』

これらの質問はどれも本人に関する質問です。このとき、二人の答えは同じになります。

ところが、『正直村へ行くには、右の道でいいのか？』のように、本人とは直接には関係しない質問には別々の答えになるはずです。

つまり、本人に関する質問をして、二人に“正直村”への道を正しく答えてもらえばいいということです。

「あなたが来た道はこの道ですか？」と尋ねてみよう・・・

もし、相手が“正直男”なら『YES』を意味する方が“正直村”。もし、相手が“嘘つき男”なら『NO』を意味する方が“嘘つき村”。

つまり、相手が“正直男”でも“嘘つき男”でも『YES』の方が“正直村”ということになる訳です・・・

発展問題はかなり難しくなっています。4種類の質問への答え方は次のようになります。

『右の道はあなたの村に通じるか？』 （正直、嘘つきで別々の答え）

『あなたは嘘をついたことがあるか？』 （正直、嘘つきとも同じ答え）

『あなたは今から私に嘘をつくのか？』 （同じ答え）

『あなたは“私の質問に嘘で答えるのか”と聞かれたら“ちがう”と答えるのか？』

（別々の答え）

ここで、質問 を分解して考えることにしよう。

『私の質問に嘘で答えるのか？』

に対する答は、“嘘つき男”も“正直男”も『NO』となります。ところが、

『あなたは“私の質問に嘘で答えるのか”と聞かれたら“ちがう”と答えるのか？』

の質問には、“正直男”の答えは『YES』で、“嘘つき男”の答えは『NO』となる。

ここで注目したいのは、『Aか?』という質問に対しては二人とも同じ答えだったのに、『Aと聞かれたら“ちがう”と答えるのか?』という質問になると、二人の答は別々のものになるということです。

逆にもし、『Bか?』という質問に対しての二人の答えが別々だったら、『Bと聞かれたら“ちがう”と答えるのか?』という質問には、二人の答は同じものになるはずですが。

『右の道はあなたの村に通じるか?』の質問への答は、二人の答は別々です。そこで、『あなたは“右の道はあなたの村に通じるか”と聞かれたら“そうだ”と答えるのか?』と質問したらどうなるか考えてみよう……